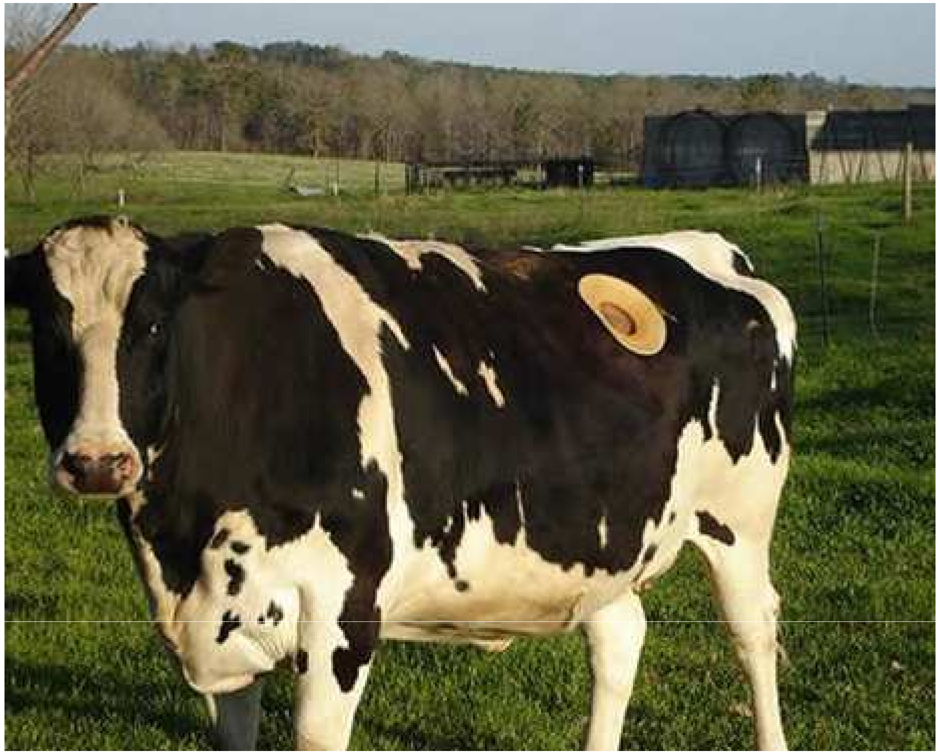
Cours sur la planification expérimentale

Les plans fractionnaires



Sir **Ronald Aylmer Fisher**
(1890 – 1962)

Exemple d'utilisation des plans d'expériences

Exemple R&D : modifier la texture de galettes de sarrasin

Objectif : réduire la proportion importante de galettes qui se déchirent lorsqu'on les déplie

Plusieurs variables interviennent dans le process :

- Quantité d'eau (45%, 55%)
- Température de la plaque (180 °, 220 °)
- Étalement de la pâte (automatique, à la main)
- Quantité de pâte par galette (55 g, 65 g)
- Farine (bio, non bio)
- Pliage (à chaud, à froid)
- Température de stockage (6 degrés, 15 degrés)

7 variables
à 2 modalités

Exemple d'utilisation des plans d'expériences

- Quelles expériences réaliser pour déterminer les facteurs influents ?

  - 1ère solution : tester toutes les combinaisons possibles

    $2^7 = 128$ expériences (1 expérience = 1 demi-journée)

    ⟹ Impossible de faire autant d'expériences !!!

- On s'autorise 16 expériences, quel choix faire ?

  - 2ème idée : faire varier 1 facteur à la fois

    ⟹ Pb : impossible d'estimer les interactions

  - 3ème idée : faire varier tous les facteurs à la fois

    ⟹ Difficulté : ne pas confondre les effets des facteurs

Peut-on construire des plans ayant de bonnes propriétés avec peu d'expériences ?

Choix des facteurs et des modalités

On veut généralement :

- étudier le maximum de facteurs
- prendre beaucoup de modalités par facteur

Pb : nombre d’expériences augmente sensiblement

Facteurs à 2 niveaux : plans simples mais très utiles car beaucoup d’applications

Les plans complets : matrice des essais

p facteurs à 2 niveaux : toutes les combinaisons sont testées : plan 2^p

Pour 2 facteurs à 2 niveaux : plan 2^2

Matrice des essais :

A	B
+1	+1
+1	-1
-1	+1
-1	-1

- le modèle additif :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

I	A	B
1	+1	+1
1	+1	-1
1	-1	+1
1	-1	-1

- le modèle avec interaction :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$$

I	A	B	AB
1	+1	+1	+1
1	+1	-1	-1
1	-1	+1	-1
1	-1	-1	+1

Matrice des effets

Les plans complets : matrice des effets

- le modèle additif :

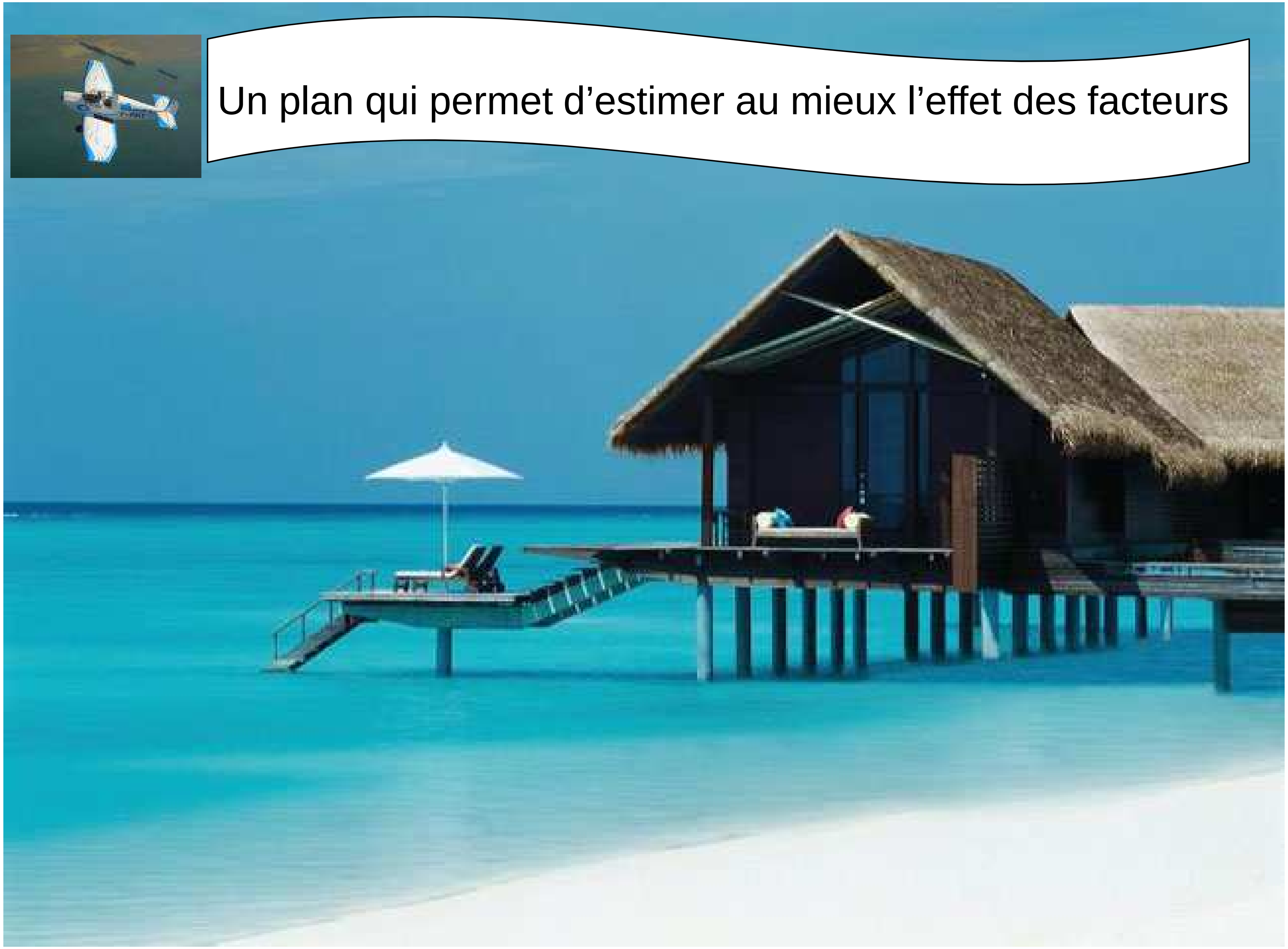
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & +1 & +1 \\ 1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (X'X) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = n\ I_3$$

- le modèle avec interaction :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & +1 & +1 & +1 \\ 1 & +1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \qquad (X'X) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = n\ I_4$$

$(X'X) = n\ Id$ (avec n = nb d'expériences) : matrice d'Hadamard

Qu’est ce qu’un bon plan ?



Un plan qui permet d’estimer au mieux l’effet des facteurs

Qu'est ce qu'un bon plan ?

Choisir les essais qui permettent d'avoir une estimation des effets de chaque variable la plus précise possible

Il faut minimiser : $V(\widehat{\beta}) = (X'X)^{-1}\sigma^2$

Dépend uniquement du **choix** des expériences

Variabilité résiduelle : dépend des résultats des expériences

Objectif des plans : trouver les expériences telles que $(X'X)^{-1}$ soit « minimale »

Plan à 3 facteurs en 4 essais

Plan complet 2^3, modèle additif

$$(X'X) = n\ I_4 = 8\ I_4 \qquad (X'X)^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.125 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{array} \end{array}$$

4 essais choisis au hasard

$$(X'X)^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.50 & 0.00 & -0.25 & 0.25 \\ 0.00 & 0.50 & 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.50 & 0.00 \\ 0.25 & 0.25 & 0.00 & 0.50 \end{bmatrix} \end{array}$$

4 essais bien choisis :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.25 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.25 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.25 \end{bmatrix} \end{array}$$

Remarque : $(X'X)^{-1} = \frac{1}{4}\mathrm{Id}$

Variance de l'estimateur de l'effet du facteur A augmente

Il n'y a plus indépendance entre l'estimation du facteur A et celle du facteur C

Attention : Supprimer des essais au hasard déséquilibre tout

Construction d'un plan 2^{3-1}

3 facteurs à 2 modalités
en 2^{3-1} = 4 essais

A	B	C
1	1	1
1	1	-1
1	-1	1
1	-1	-1
-1	1	1
-1	1	-1
-1	-1	1
-1	-1	-1

Choix de 4 essais

1ère idée : pour chaque facteur, tester les niveaux 1 et -1 un même nb de fois

2ème idée : pour chaque couple de 2 facteurs, prendre autant de combinaisons (1,1), (-1,1), (1,-1) et (-1,-1)

Choix d'essais dans le cas général :

1ère idée : les niveaux de chaque facteur testés un même nb de fois

2ème idée : prendre autant de combinaisons (1,1), (-1,1), (1,-1) et (-1,-1) pour chaque couple de 2 facteurs

3ème idée : prendre autant de combinaisons (1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1), … pour chaque triplet de 3 facteurs

4ème idée : prendre autant de combinaisons (1,1,1,1), (1,1,1,-1), (1,1,-1,1), … pour chaque quadruplet de 4 facteurs

…

Beaucoup trop compliqué de construire un plan de cette façon
Besoin d'un principe de construction simple si beaucoup de facteurs

Constat

- Un plan complet permet d'estimer tous les facteurs et toutes les interactions d'ordre 2, 3, 4, …
- Interactions d'ordre 3 et + sont souvent négligeables
- Exemple : plan 2^5 :

$$\underbrace{1}_{\text{Constante}} + \underbrace{5}_{\text{Effet}} + \underbrace{10}_{\text{Interactions d'ordre 2}} = 16$$ paramètres intéressants à estimer

⇒ Dommage de faire 32 expériences pour n'estimer « que » 16 paramètres

Principe de construction des plans fractionnaires 2^{p-k}

1. Choix d'un plan de base à 2^{p-k} essais
2. Construction de la matrice des effets du modèle saturé avec ce plan de base
3. Choix des confusions : affectation des effets principaux
4. Détermination des confusions résultantes

Retour sur le plan fractionnaire 2^{3-1}

1. Choix d'un plan de base
   à $2^2 = 4$ essais

2. Construction de la matrice
   des effets du modèle saturé
   avec ce plan de base

3. Le facteur C est confondu avec
   l'interaction AB

4. Détermination des confusions
   résultantes : C = AB

			C
I	A	B	AB
1	1	1	1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1

Confusion d'effet (alias) et générateur d'alias

$$C = AB \implies CC = ABC \implies I = ABC$$

I	A	B	AB
ABC	BC	AC	C
1	1	1	1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1

C	x	C		I
1	x	1	=	1
(-1)	x	(-1)	=	1
(-1)	x	(-1)	=	1
1	x	1	=	1

$$I = ABC \implies A(I) = A(ABC) \implies A = BC$$

$$\implies B(I) = B(ABC) \implies B = AC$$

Confusion d'effet (plan $2^{3\text{-}1}$)

Générateur d'alias : I = ABC

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{AB} & \mathbf{AC} & \mathbf{BC} & \mathbf{ABC} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$X'X = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{AB} & \mathbf{AC} & \mathbf{BC} & \mathbf{ABC} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} I \\ A \\ B \\ C \\ AB \\ AC \\ BC \\ ABC \end{array} \end{array}$$

X'X non inversible car confusion entre I et ABC, entre A et BC, …

Mais si on se restreint à l'étude des effets principaux :

$X'X$ **s'écrit simplement et est facilement inversible :** $(X'X)^{-1} = \frac{1}{n}\mathrm{Id}$

Construction d'un plan fractionnaire 2^{4-1}

1. Choix d'un plan de base à 2^3 = 8 essais

2. Construction de la matrice des effets du modèle saturé avec ce plan de base

3. L'interaction ABC certainement négligeable : confondre le facteur D avec l'interaction ABC

4. Détermination des confusions résultantes : D = ABC

							D
I	**A**	**B**	**C**	AB	AC	BC	ABC
1	**1**	**1**	**1**	1	1	1	1
1	**1**	**1**	**-1**	1	-1	-1	-1
1	**1**	**-1**	**1**	-1	1	-1	-1
1	**1**	**-1**	**-1**	-1	-1	1	1
1	**-1**	**1**	**1**	-1	-1	1	-1
1	**-1**	**1**	**-1**	-1	1	-1	1
1	**-1**	**-1**	**1**	1	-1	-1	1
1	**-1**	**-1**	**-1**	1	1	1	-1

Confusion d'effet (alias) et générateur d'alias

$$D = ABC \implies DD = ABCD \implies I = ABCD$$

I	**A**	**B**	**C**	AB	AC	BC	ABC		
ABCD	BCD	ACD	ABD	CD	BD	AD	**D**	**D**	**I**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1

$$I = ABCD \implies A(I) = A(ABCD) \implies A = BCD$$

Construction d'un plan fractionnaire 2^{5-2}

1. Choix d'un plan de base
   à 2^3 = 8 essais

2. Construction de la matrice
   des effets du modèle saturé
   avec ce plan de base

3. Affectation des effets principaux

				D	E		
I	**A**	**B**	**C**	AB	AC	BC	ABC
1	**1**	**1**	**1**	1	1	1	1
1	**1**	**1**	**-1**	1	-1	-1	-1
1	**1**	**-1**	**1**	-1	1	-1	-1
1	**1**	**-1**	**-1**	-1	-1	1	1
1	**-1**	**1**	**1**	-1	-1	1	-1
1	**-1**	**1**	**-1**	-1	1	-1	1
1	**-1**	**-1**	**1**	1	-1	-1	1
1	**-1**	**-1**	**-1**	1	1	1	-1

4. Détermination des confusions résultantes

$$D = AB \qquad E = AC$$

Confusion d'effet (alias) et générateur d'alias

$$D = AB \implies DD = ABD \implies I = ABD$$
$$E = AC \implies EE = ACE \implies I = ACE$$

On a aussi $E = BCD \implies EE = BCDE \implies I = BCDE$

$$I = ABD = ACE \implies II = (ABD)(ACE) \implies I = BCDE$$

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
ABD	BD	AD	ABCD	D	BCD	ACD	CD
ACE	CE	ABCE	AE	BCE	E	ABE	BE
BCDE	ABCDE	CDE	BDE	ACDE	ABDE	DE	ADE

Confusion d'effets : estimation de paquets d'effets ou interactions.

Paquet bleu estimable mais impossible de savoir ce qui est dû à C, à l'interaction ABCD, l'interaction AE, l'interaction BDE

Nombre de facteurs et nombre d'essais

Résolution = longueur du plus petit générateur d'alias

Exemple : plan 2^{4-1} : I = ABCD Résolution IV

plan 2^{5-2} : I = ABD = BCE = BCDE Résolution III

Résolution III : effet principaux confondus avec interactions d'ordre 2 ou plus

Résolution IV : effet principaux confondus avec interactions d'ordre 3 ou plus

Résolution V : effet principaux confondus avec interactions d'ordre 4 ou plus
et interactions d'ordre 2 confondues avec interactions d'ordre 3 ou plus

s	3	4	5	6	7	8	9
Nb d'expériences : 2^s	8	16	32	64	128	256	512
Nb de facteurs en résolution 3 : 2^s-1	7	15	31	63	127	255	511
Nb de facteurs en résolution 4 : 2^{s-1}	4	8	16	32	64	128	256
Nb de facteurs en résolution 5	3	5	6	8	11	17	$\geq$ 23

Dépouillement des résultats

Règles :

On considère négligeables :

1. tous les termes d'un paquet lorsque le paquet est négligeable
2. les interactions d'ordre supérieur ou égal à 3
3. les interactions entre 2 effets négligeables
4. les interactions comprenant un effet négligeable
5. toutes les interactions

Contraintes de + en + fortes

Dépouillement des résultats : exemple plan 2^{5-2}

I	**A**	**B**	**C**	AB	AC	BC	ABC
ABD	BD	AD	ABCD	**D**	BCD	ACD	CD
ACE	CE	ABCE	AE	BCE	**E**	ABE	BE
BCDE	ABCDE	CDE	BDE	ACDE	ABDE	DE	ADE
2.25*	-3.15*	0.35	-0.52	2.58*	4.15*	-0.63	0.26

Les paquets **3**, **4**, **7** et **8** sont négligeables

Règle 1 : tous les termes des paquets **3**, **4**, **7** et **8** sont négligeables

Règle 2 : les interactions d'ordre supérieur à 2 sont négligeables

Règle 3 : les interactions entre 2 effets négligeables sont négligeables (aucune)

Règle 4 : les interactions comprenant un effet négligeable (BD, CE, AB, AC)

Règle 5 : toutes les interactions sont négligeables (inutile)

De la résolution 3 à la résolution 4

- Ajout du plan complémentaire au plan de résolution 3
- Exemple : plan 2^{5-2}

Plan initial :

$$\left.\begin{array}{l} D = AB \\ \\ E = AC \end{array}\right\} I = ABD = ACE = BCDE$$

Plan complémentaire :

$$-D = (-A)(-B) \implies D = -AB$$

$$-E = (-A)(-C) \implies E = -AC$$

Plan complet :

$$\left.\begin{array}{l} D = ABS \\ \\ E = ACS \end{array}\right\} I = ABDS = ACES = BCDE$$

S	A	B	C	D	E
1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	-1
1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	1	-1	1
-1	-1	1	-1	1	-1
-1	-1	1	1	1	1
-1	1	-1	-1	1	1
-1	1	-1	1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	1
-1	1	1	1	-1	-1

Plan initial

Plan complémentaire

Démarche statistique

1. Définir la problématique
2. Choisir les expériences à réaliser (planification expérimentale)
3. Effectuer les expériences
4. Dépouiller les résultats (analyse de variance)

Retrouver ce cours sur Youtube

- https://www.youtube.com/HussonFrancois

- Dans Google, taper les mots clés :
  Youtube plans d’expériences Husson