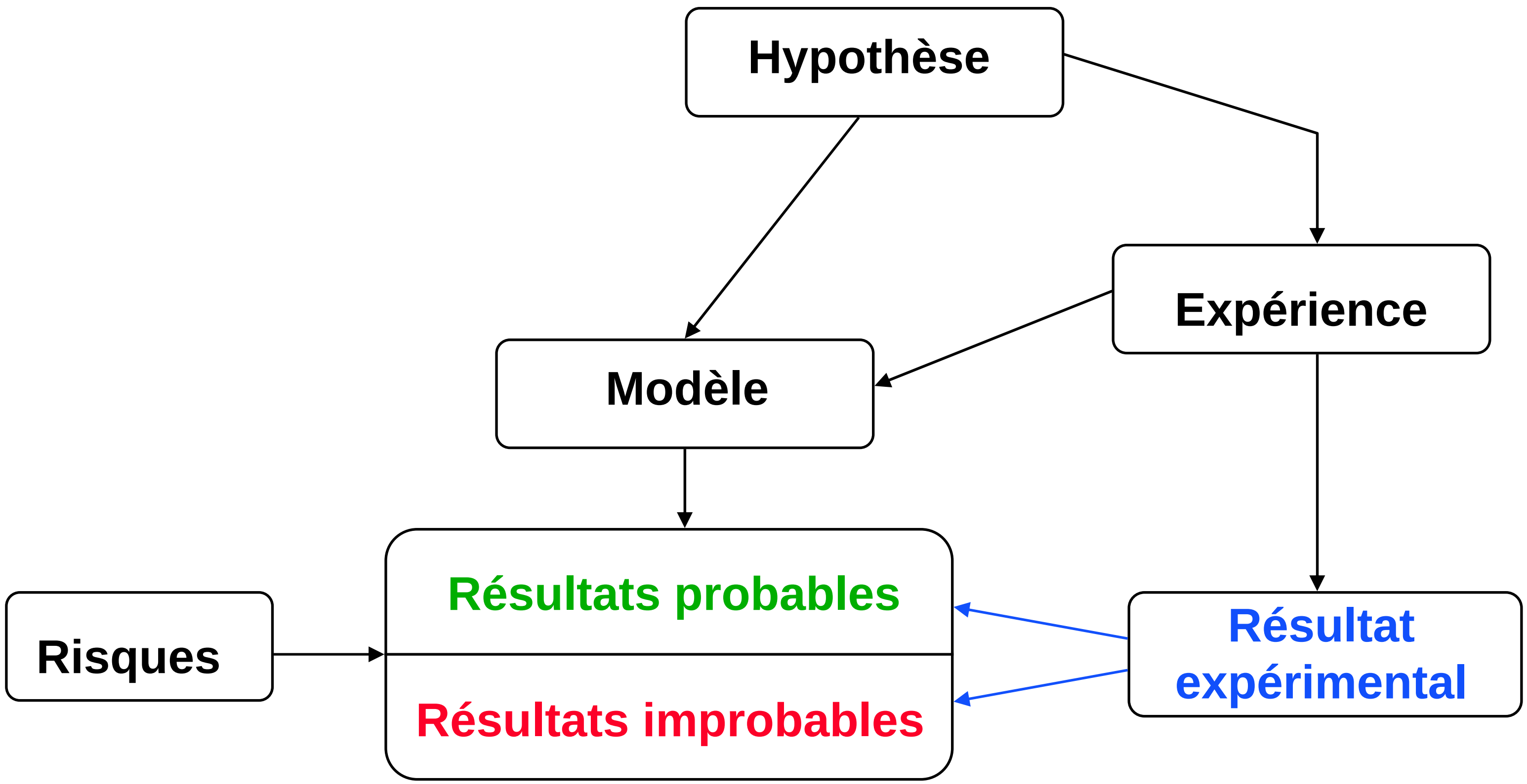
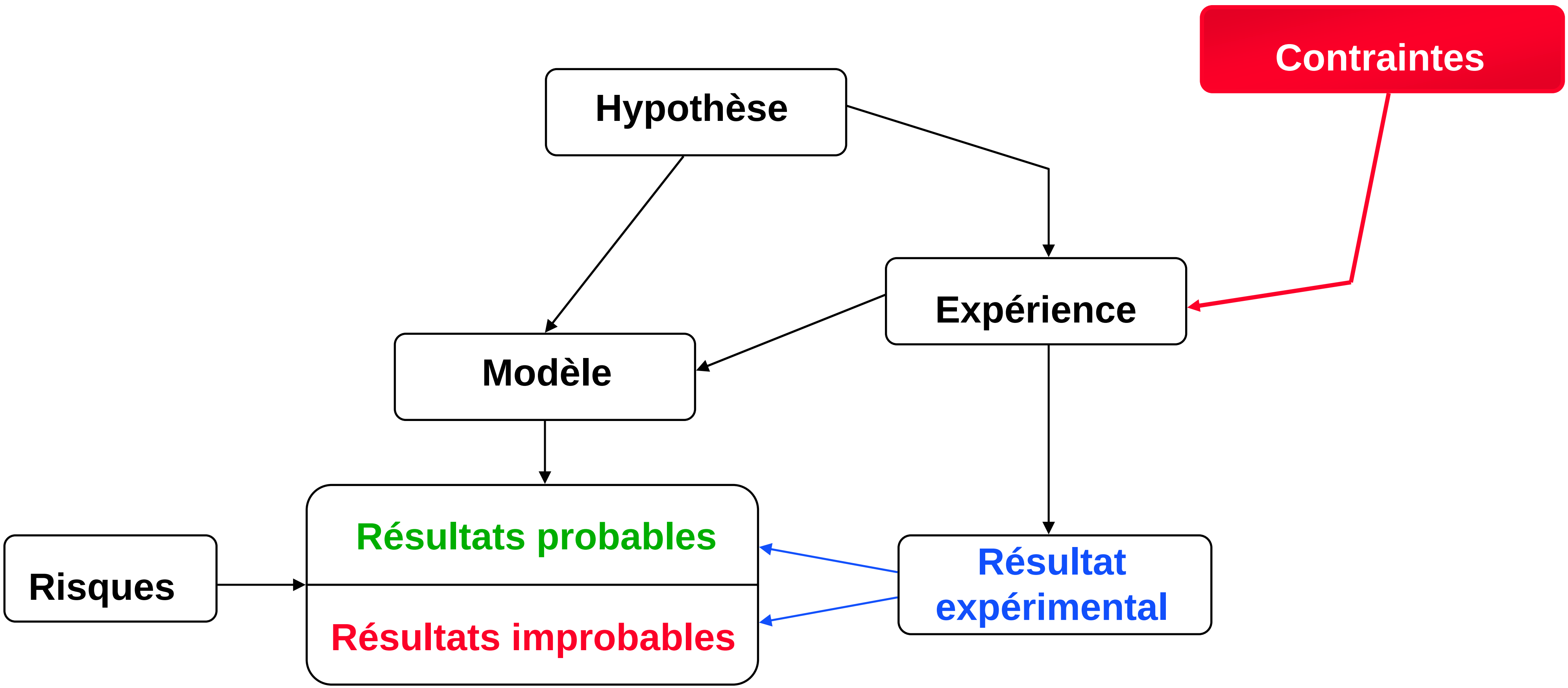
LES PLANS D'EXPÉRIENCES

Marc DANZART

1 Avenue des Olympiades
91744 MASSY CEDEX
France
Tel : 33 1 69 93 50 27
Fax : 33 1 69 93 51 74
E-mail : danzart @ ensia.fr


Hypothèse
Expérience
Modèle
Résultats probables
Résultats improbables
Risques
Résultat expérimental


Contraintes
Hypothèse
Expérience
Modèle
Résultats probables
Résultats improbables
Risques
Résultat
expérimental

Satisfaire des contraintes

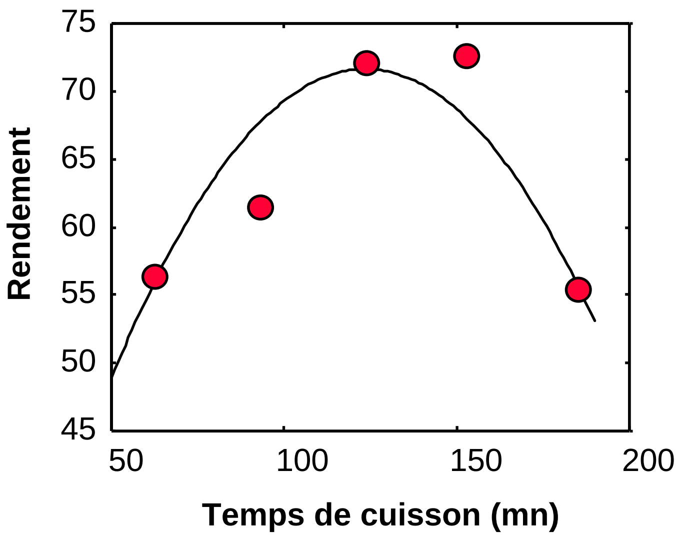
De coût
De temps
D'organisation
...

	Pdt 1	Pdt 2	Pdt 3	Pdt 4	Pdt 5	Pdt 6	Pdt 7	Pdt 8
Sujet n° 1								
Sujet n° 2								
Sujet n° 3								
Sujet n° 4								
Sujet n° 5								
Sujet n° 6								
Sujet n° 7								
Sujet n° 8								
Sujet n° 9								
Sujet n° 10								

La confusion d'effets

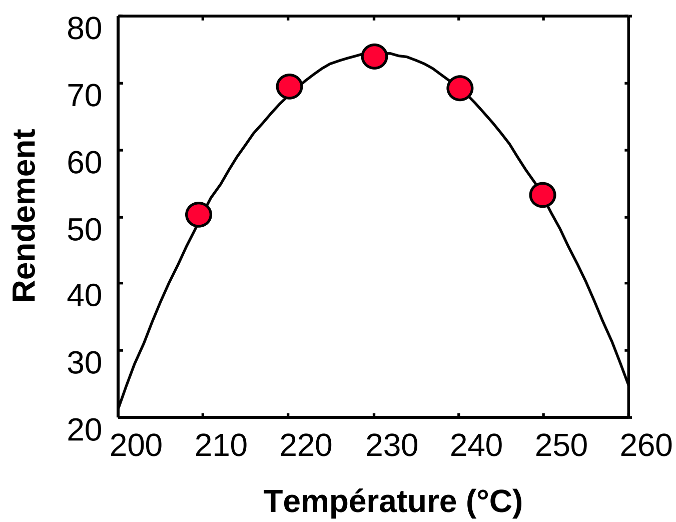
OPTIMISATION D'UN COUPLE TEMPS x TEMPÉRATURE

On étudie l'effet du temps de cuisson sur le rendement

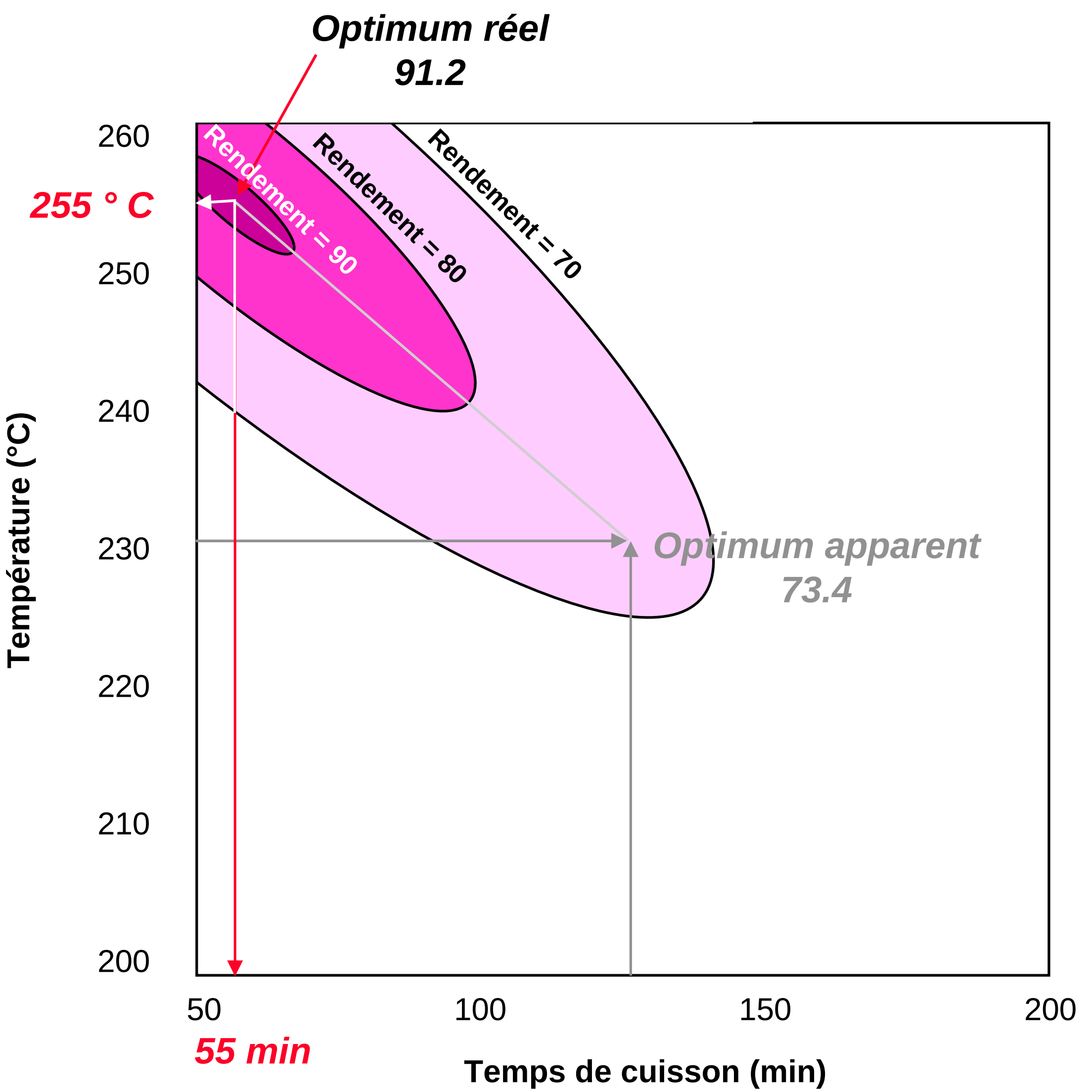


t_{opt} = 123.6 mn

On fixe donc t à 125 mn puis on étudie l'effet de la température



OPTIMISATION D'UN COUPLE TEMPS x TEMPÉRATURE



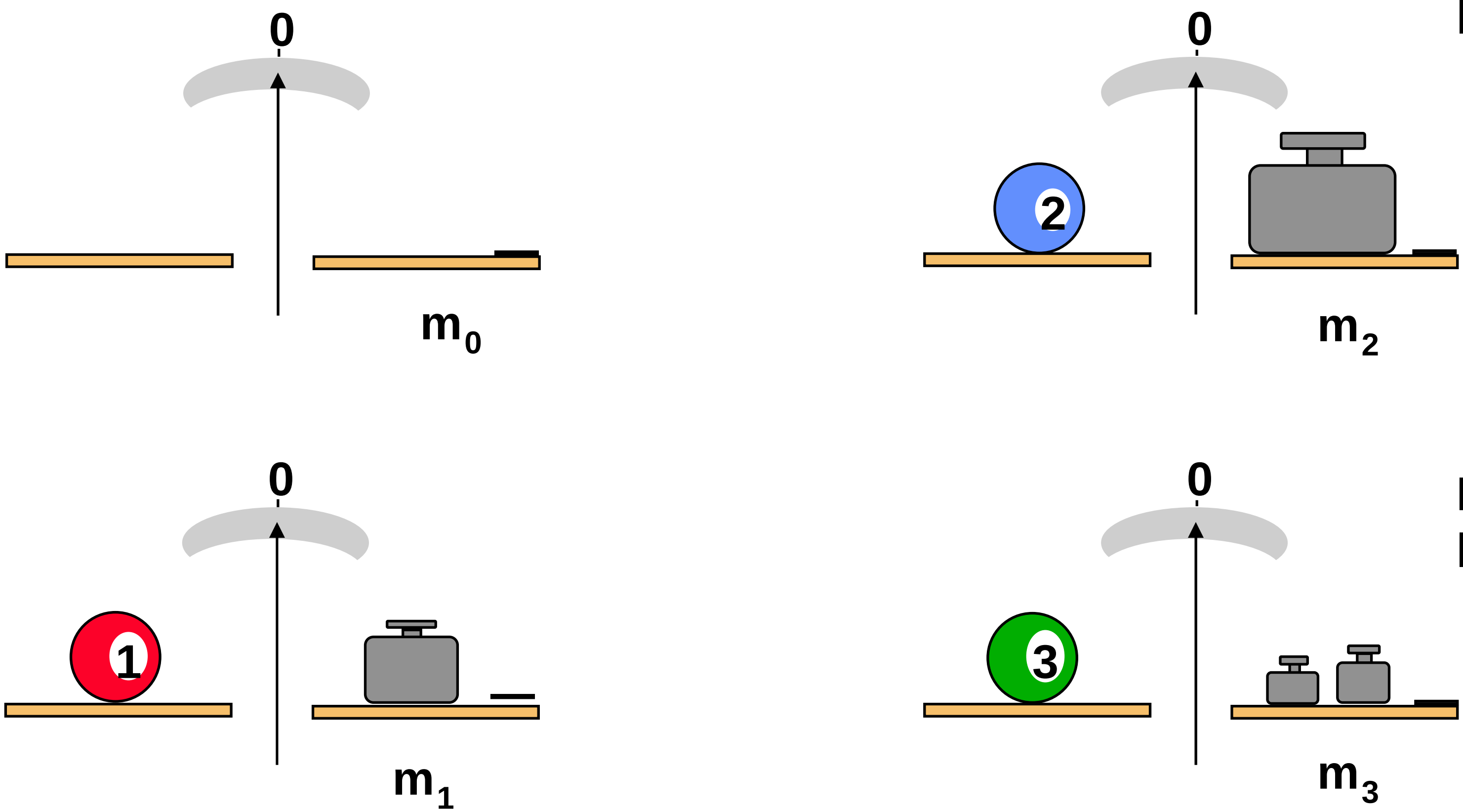
LA PESÉE … Version 1

Tarage de la balance

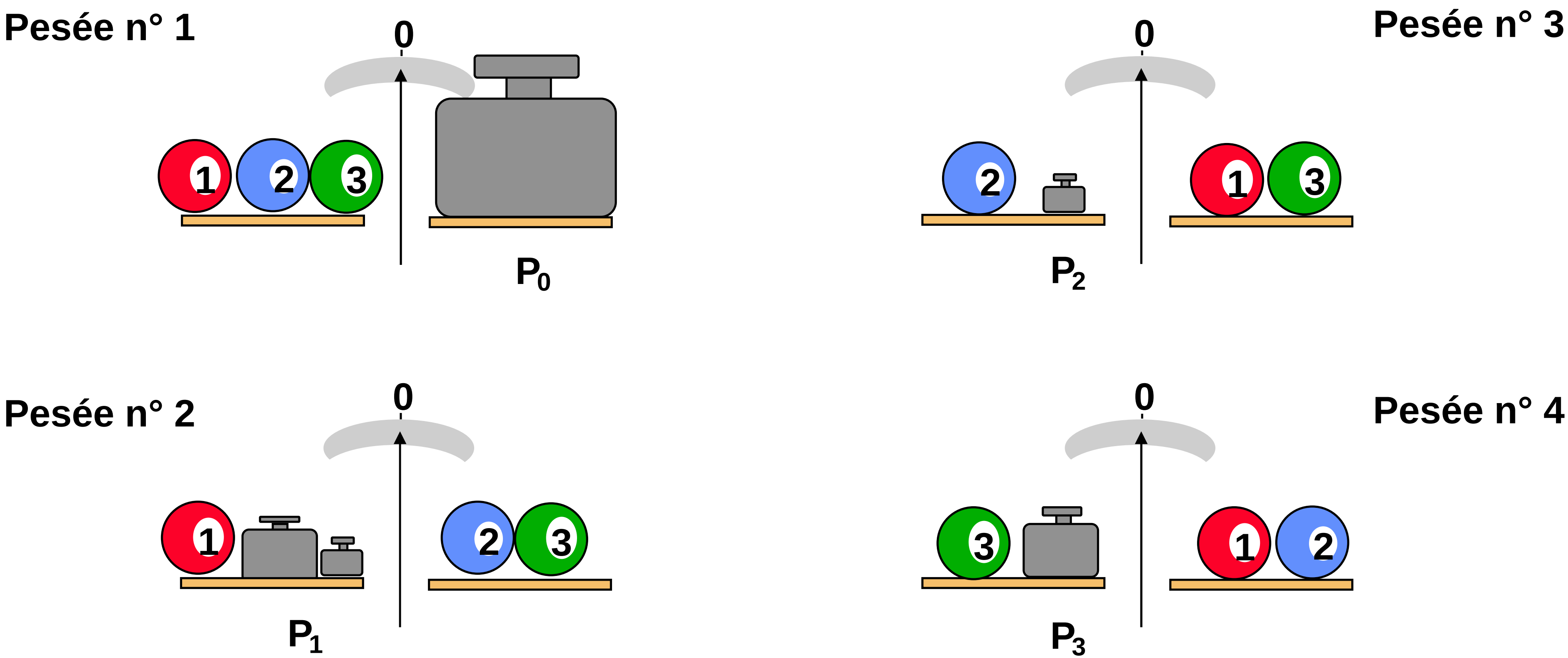
Pesée de l'objet n° 2

Pesée de l'objet n° 1

Pesée de l'objet n° 3



LA PESÉE ... Version 2



LA PESÉE : LE CALCUL DES POIDS ...

OBJET	VERSION 1	VERSION 2
1	m_1	$m_1 = \dfrac{P_0 + P_1 - P_2 - P_3}{4}$
2	m_2	$m_2 = \dfrac{P_0 + P_2 - P_1 - P_3}{4}$
3	m_3	$m_3 = \dfrac{P_0 + P_3 - P_1 - P_2}{4}$

LA PESÉE : LES PRÉCISIONS ...

OBJET	VERSION 1	VERSION 2
1	$2\sigma^2$	$\sigma^2/4$
2	$2\sigma^2$	$\sigma^2/4$
3	$2\sigma^2$	$\sigma^2/4$

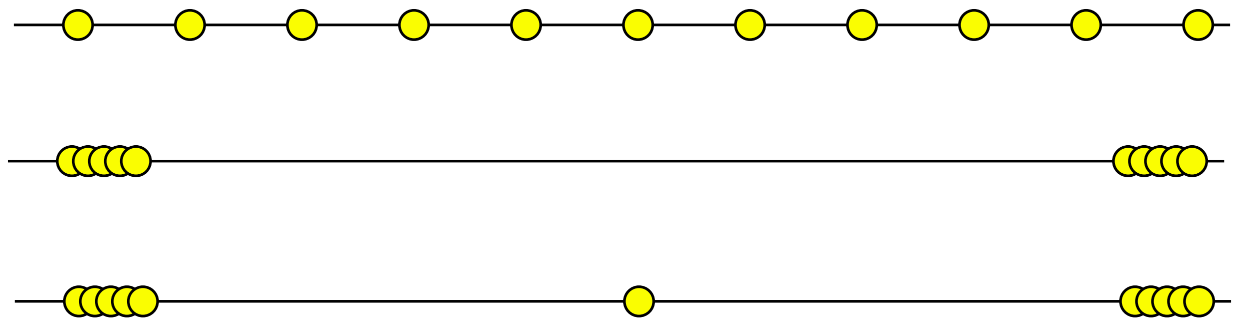
La pesée "originale" conduit à une précision près de 3 fois supérieure à celle de la pesée traditionnelle

LES DANGERS

$$y = a + b\,x + \varepsilon$$

La précision de la réponse du modèle au point x est calculable a priori :

$$\mathrm{Var}\left(\hat{y}(x)\right) = \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - x_.)^2}{\sum (x_i - x_.)^2}\right)$$



LE MODÈLE LINÉAIRE

$$Y = X\theta + E$$

Vecteur des résultats

Matrice du plan d'experience

Vecteur des paramètres

Vecteur des erreurs

$$\hat{\theta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

Si X'X est inversible

$$\hat{\theta} = (X'X+H'H)^{-1}X'Y$$

Si X'X n'est pas inversible
H représente la matrice des contraintes

$$\hat{\theta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

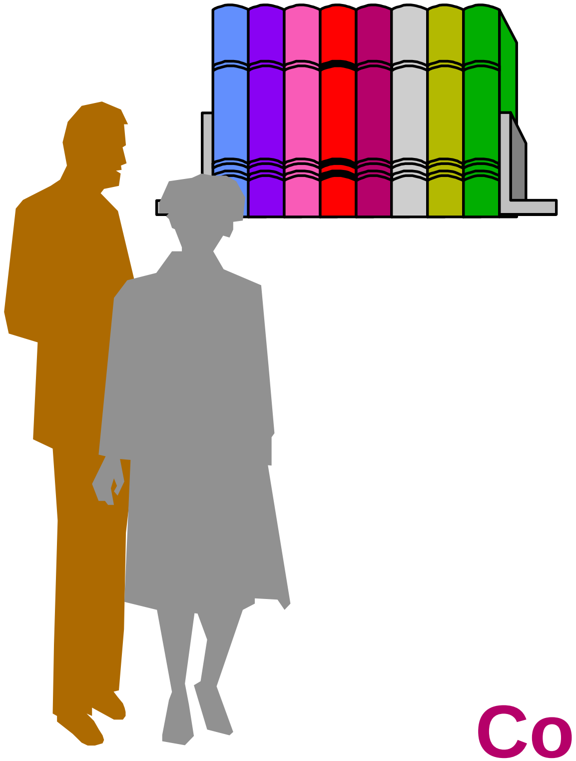
$$Var(\hat{\theta}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

La corrélation entre les paramètres est prévisible à l'avance et dépend de la structure expérimentale

Un bon plan minimise la matrice $(X'X)^{-1}$

Minimisation du déterminant $\Rightarrow$ D-optimalité

LES PRINCIPALES CLASSES DE PLANS D'EXPÉRIENCES EN INDUSTRIE ALIMENTAIRE



Détecter les facteurs influents

Plans de Plackett-Burman
Méthode Taguchi
...

Optimiser un process

Plans Central composite
Plans de Box-Benhken
...

Optimiser un mélange

Plans de Scheffé
Extreme vertices designs
...

Comparer un grand nombre de produits

Blocs incomplets équilibrés
...

LES PLANS FACTORIELS COMPLETS

TOUTES LES COMBINAISONS DES NIVEAUX DES FACTEURS SONT TESTÉES

LE NOMBRE D'EXPÉRIENCES EST DONC ÉGAL AU PRODUIT DES NOMBRES DES NIVEAUX

Ici n = 3 x 2 x 3 = 18 essais

	Facteur n° 1	*Facteur n° 2*	*Facteur n° 3*
Exp. n° 1	1	1	1
Exp. n° 2	1	1	2
Exp. n° 3	1	1	3
Exp. n° 4	1	2	1
Exp. n° 5	1	2	2
Exp. n° 6	1	2	3
Exp. n° 7	2	1	1
Exp. n° 8	2	1	2
Exp. n° 9	2	1	3
Exp. n° 10	2	2	1
Exp. n° 11	2	2	2
Exp. n° 12	2	2	3
Exp. n° 13	3	1	1
Exp. n° 14	3	1	2
Exp. n° 15	3	1	3
Exp. n° 16	3	2	1
Exp. n° 17	3	2	2
Exp. n° 18	3	2	3

CONSTATATION : DIFFICULTÉ A INTERPRÊTER LES INTERACTIONS D'ORDRE ÉLEVÉ

IDÉE : EN PROFITER POUR MINIMISER LE NOMBRE D'ESSAIS

DANGER : LA CONFUSION D'EFFETS

LES MATRICES DE HADAMARD (1)

Pour chacun des facteurs étudiés on choisit deux valeurs appelées respectivement

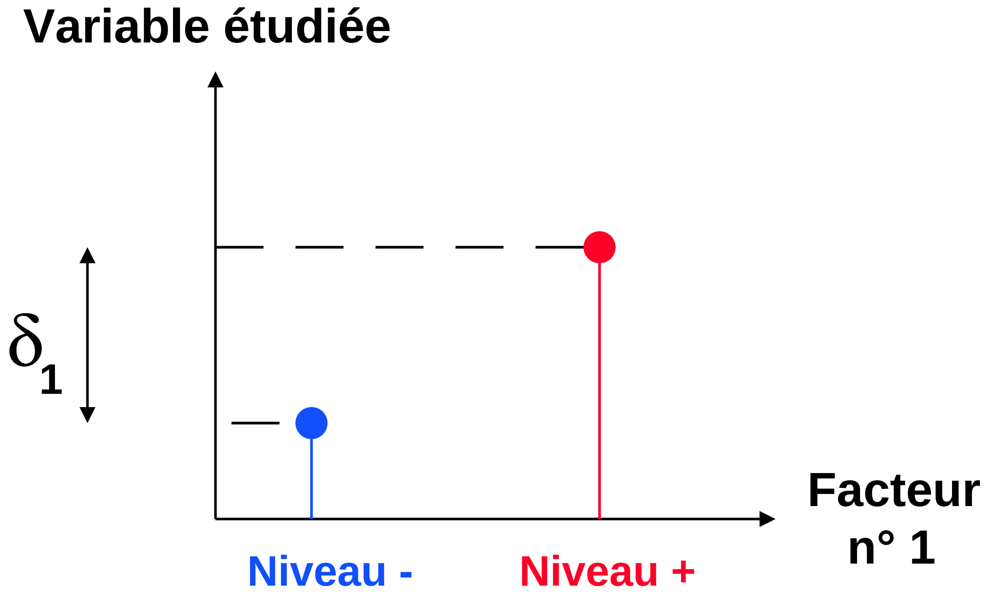
niveau bas	**noté -**
niveau haut	**noté +**

Si le facteur est qualitatif ce sont les deux niveaux
Si le facteur est quantitatif ce sont deux valeurs choisies dans la plage de variation du facteur

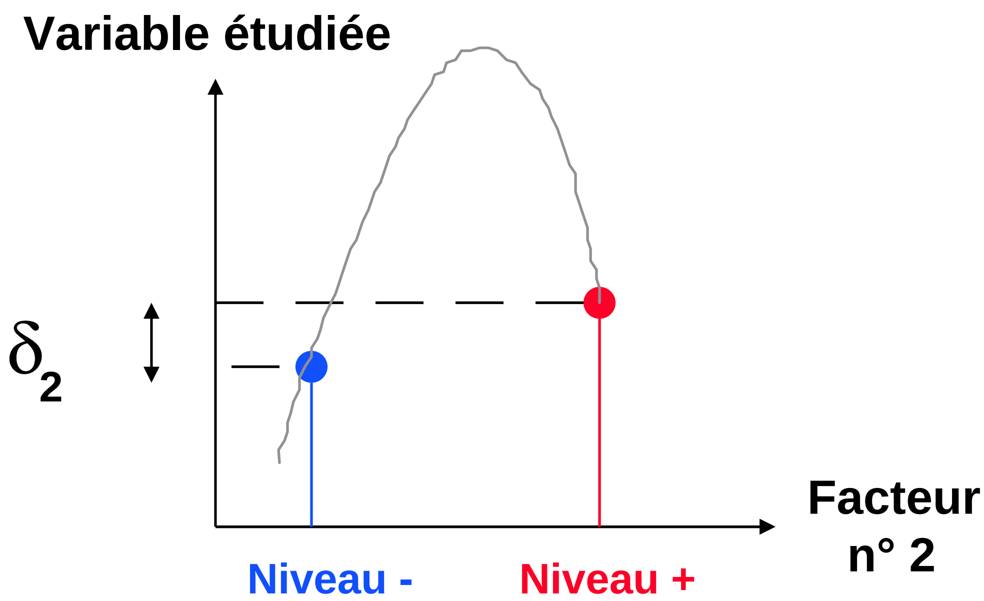
LES MATRICES DE HADAMARD (2)

	Facteur n° 1	Facteur n° 2	Facteur n° 3	Facteur n° 4	Facteur n° 5	Facteur n° 6	Facteur n° 7
essai n° 1	+	+	+	−	+	−	−
essai n° 2	−	+	+	+	−	+	−
essai n° 3	−	−	+	+	+	−	+
essai n° 4	+	−	−	+	+	+	−
essai n° 5	−	+	−	−	+	+	+
essai n° 6	+	−	+	−	−	+	+
essai n° 7	+	+	−	+	−	−	+
essai n° 8	−	−	−	−	−	−	−

LES MATRICES DE HADAMARD (3)



LES MATRICES DE HADAMARD (4)



Erreur due à la non linéarité de l'influence du facteur étudié

LES MATRICES DE HADAMARD (5)

Le nombre d'expériences est toujours un multiple de 4

n = 4 + + −

n = 8 + + + − + − −

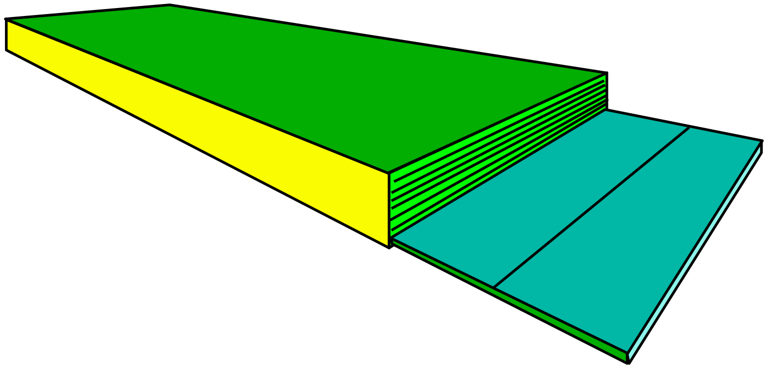
n = 12 + + − + + + − − − + −

n = 16 + + + + − + − + + − − + − − −

n = 20 + + − − + + + + − + − + − − − − + + −

Nouveau procédé : extrusion

Nouvelle composition : les polyols remplacent les sucres



11 paramètres à optimiser simultanément

- Type de vis de l'extrudeur
- Vitesse de rotation de la vis
- Température de la gomme
- ...
- Pourcentage de Xylitol
- Pourcentage de Mannitol
- ...

LES PLANS FRACTIONNÉS 3^{p-k}

Lorsque les facteurs étudiés sont des facteurs à 3 niveaux, on étudie des fractions du plan complet 3^p.

Pour cela on construit d'abord un plan complet à 2 facteurs. Ce plan comporte 9 essais (3x3). Il est bien sûr orthogonal !

Facteur de base n° 1	*Facteur de base n° 2*
1	1
1	2
1	3
2	1
2	2
2	3
3	1
3	2
3	3

Si l'on souhaite étudier plus de 2 facteurs il faut ajouter des colonnes équilibrées (3 expériences au niveau 1, 3 au niveau 2 et 3 au niveau 3) qui doivent être orthogonales aux précédentes

A cet effet on étudie la famille des carrés latins orthogonaux 3x3.

LES PLANS FRACTIONNÉS 3^{p-k}

CL_1

1	2	3
2	3	1
3	1	2

CL_2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Chacun des deux carrés latins sert à construire une colonne !

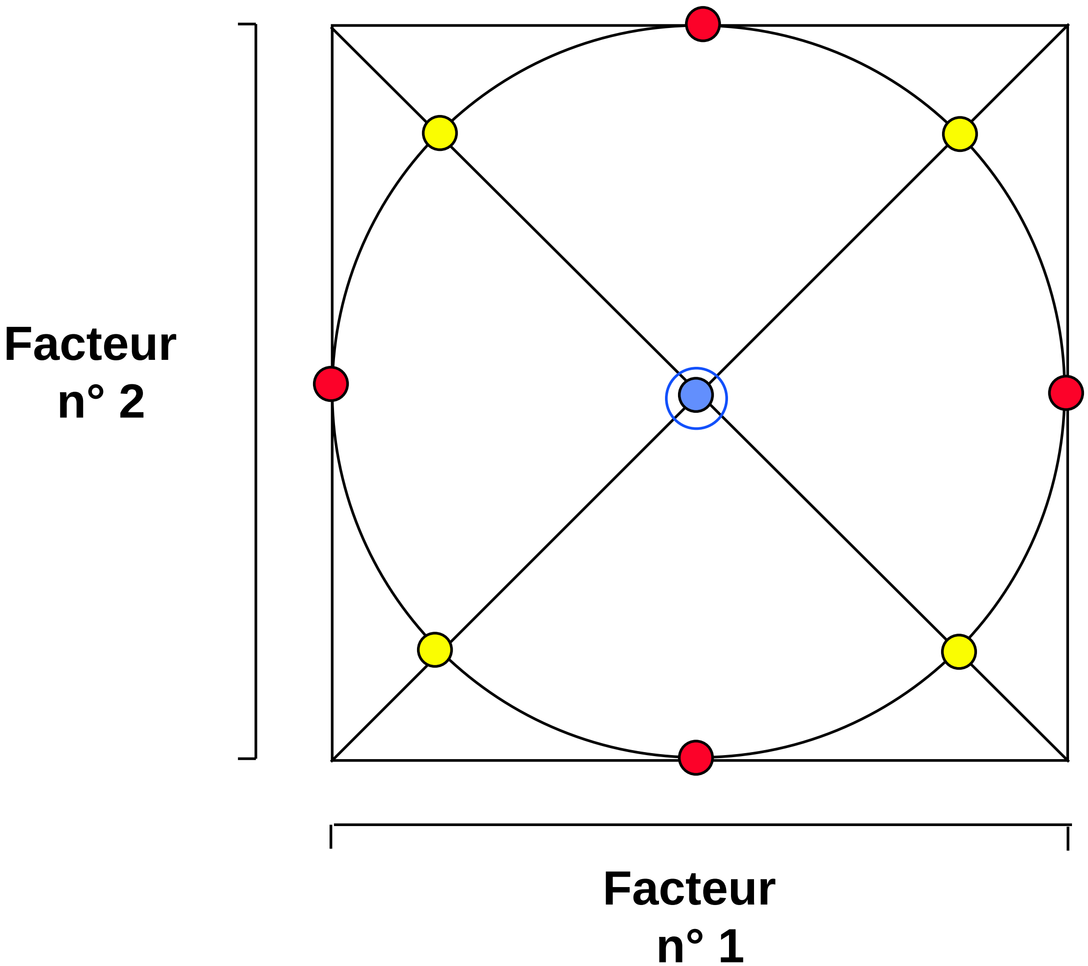
Facteur de base n° 1	*Facteur de base n° 2*	*Facteur n° 3*	*Facteur n° 4*
1	1	1	1
1	2	2	3
1	3	3	2
2	1	2	2
2	2	3	1
2	3	1	3
3	1	3	3
3	2	1	2
3	3	2	1

Il n'est pas possible d'étudier plus de 4 facteurs avec 9 essais ! …
car il n'existe pas d'autre carré latin orthogonal aux deux carrés existants.
Il faudra alors au moins 27 essais !!

LES PLANS CENTRAL COMPOSITE (1)

OBJECTIF :	**TROUVER UN OPTIMUM**
MODÈLE ASSOCIÉ :	**SURFACES DE RÉPONSE**
CONTRAINTES :	**VARIABLES QUANTITATIVES**
PROPRIÉTÉS :	**D-OPTIMALITÉ, ROTATABILITÉ et ISOVARIANCE PAR ROTATION**

LES PLANS CENTRAL COMPOSITE (2)



- 2^p points de l'hypercube
- $2p$ points du parallèlotope étoilé
- 2 points centraux

Soit $n = 2^p + 2.p + 2$ essais au total

Chaque facteur est utilisé à 5 valeurs différentes

LES PLANS CENTRAL COMPOSITE (3)

Chaque facteur est étudié à 5 niveaux

La valeur minimum — min
La $1^{ère}$ valeur intermédiaire — V_1
La valeur moyenne — moy.
La 1ère valeur intermédiaire — V_3
La valeur maximum — Max

$$V_1 = moy. - \frac{\sqrt{p}}{p}(moy.-min)$$

$$V_3 = moy. + \frac{\sqrt{p}}{p}(moy.-min)$$

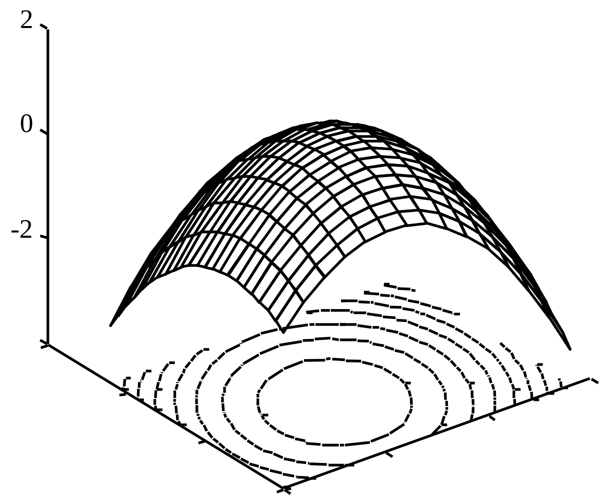
Plan Central composite à 3 facteurs

moy.	moy.	moy.
moy.	moy.	moy.
moy.	moy.	min
moy.	moy.	Max
moy.	min	moy.
moy.	Max	moy.
min	moy.	moy.
Max	moy.	moy.
V_1	V_1	V_1
V_1	V_1	V_3
V_1	V_3	V_1
V_1	V_3	V_3
V_3	V_1	V_1
V_3	V_1	V_3
V_3	V_3	V_1
V_3	V_3	V_3

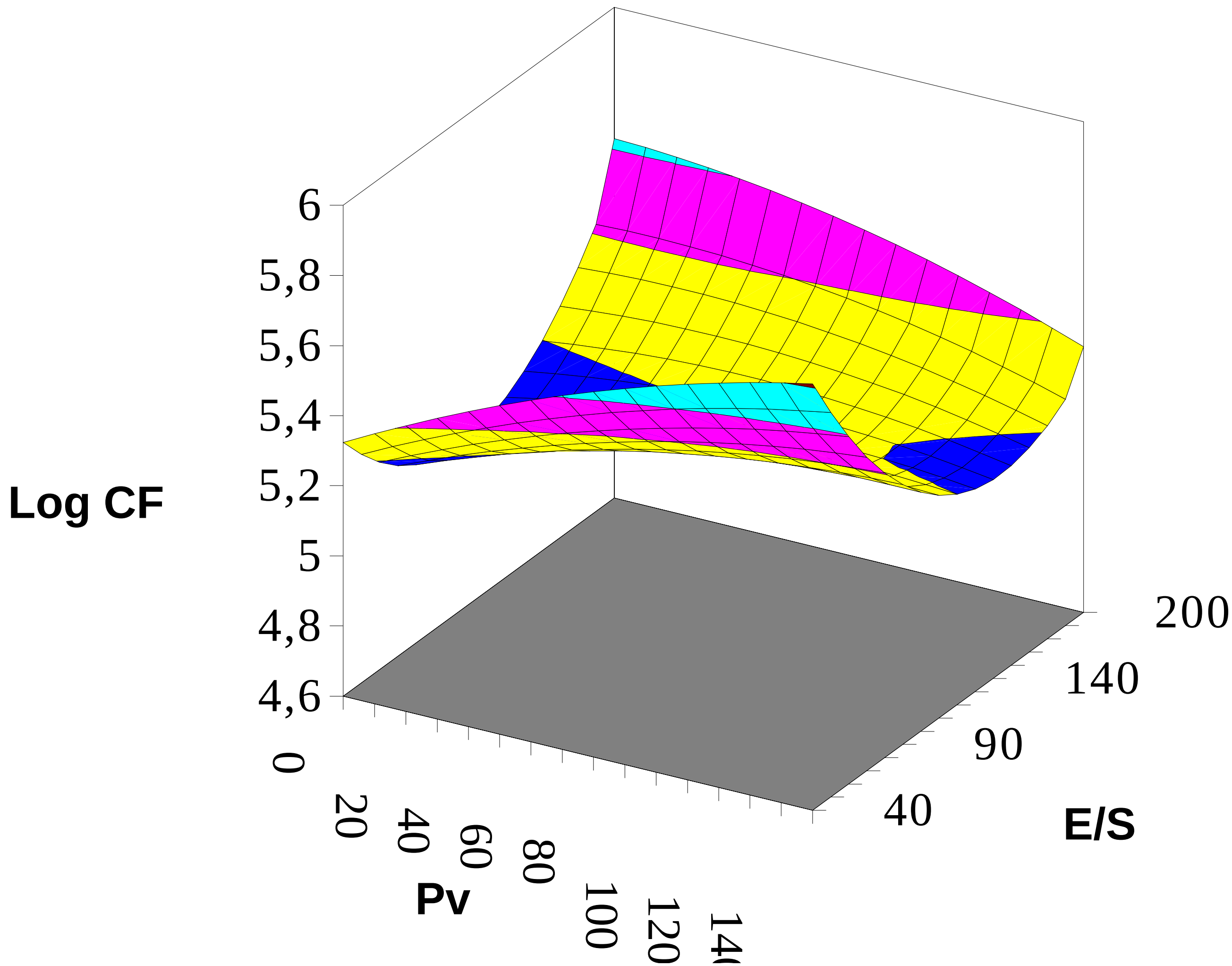
LES PLANS CENTRAL COMPOSITE (4)

Equation polynomiale du modèle :

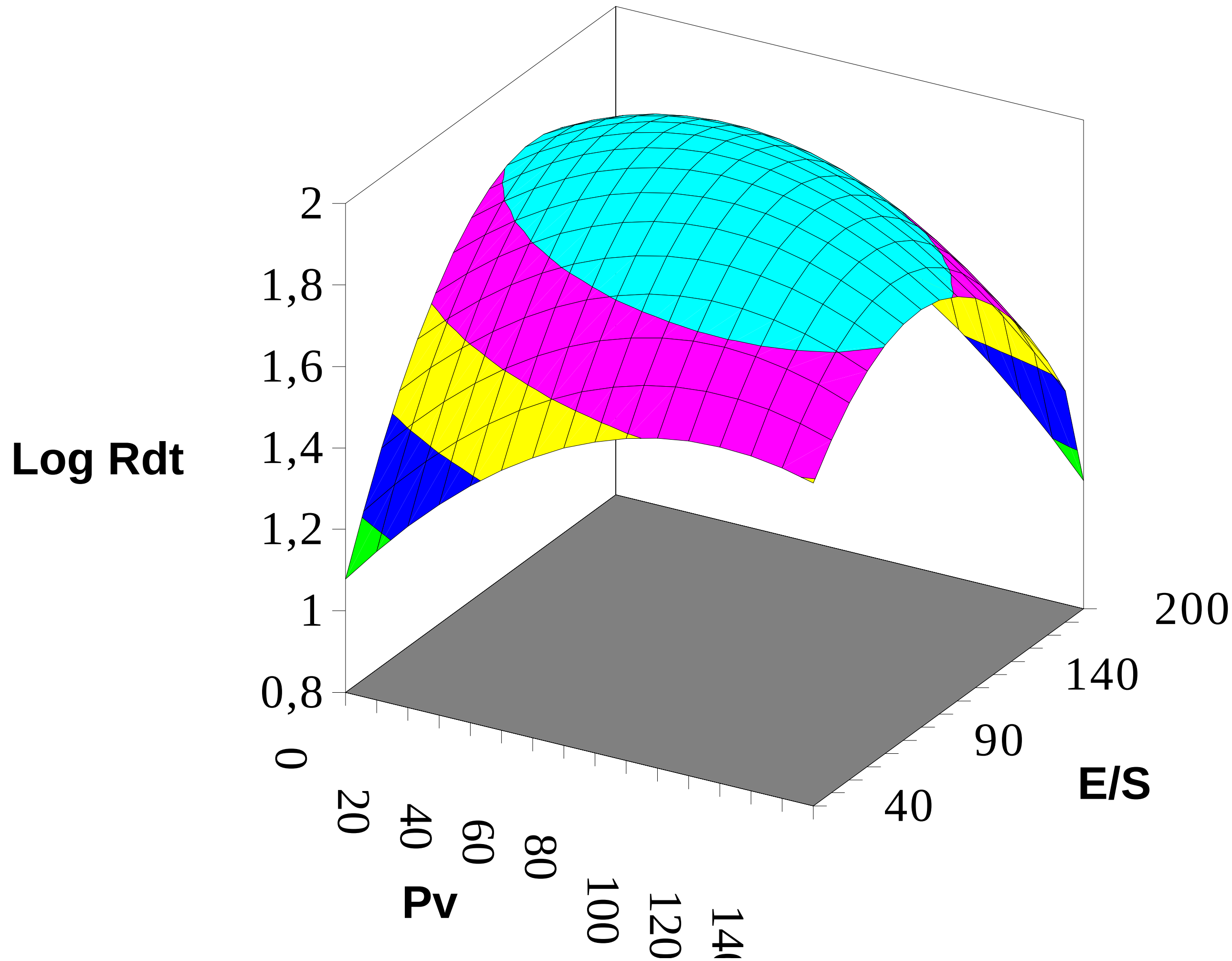
$$Y = a_0 + a_1.P_v + a_2.E/S + a_3.(P_v)^2 + a_4.(E/S)^2 + a_5.P_v.E/S$$



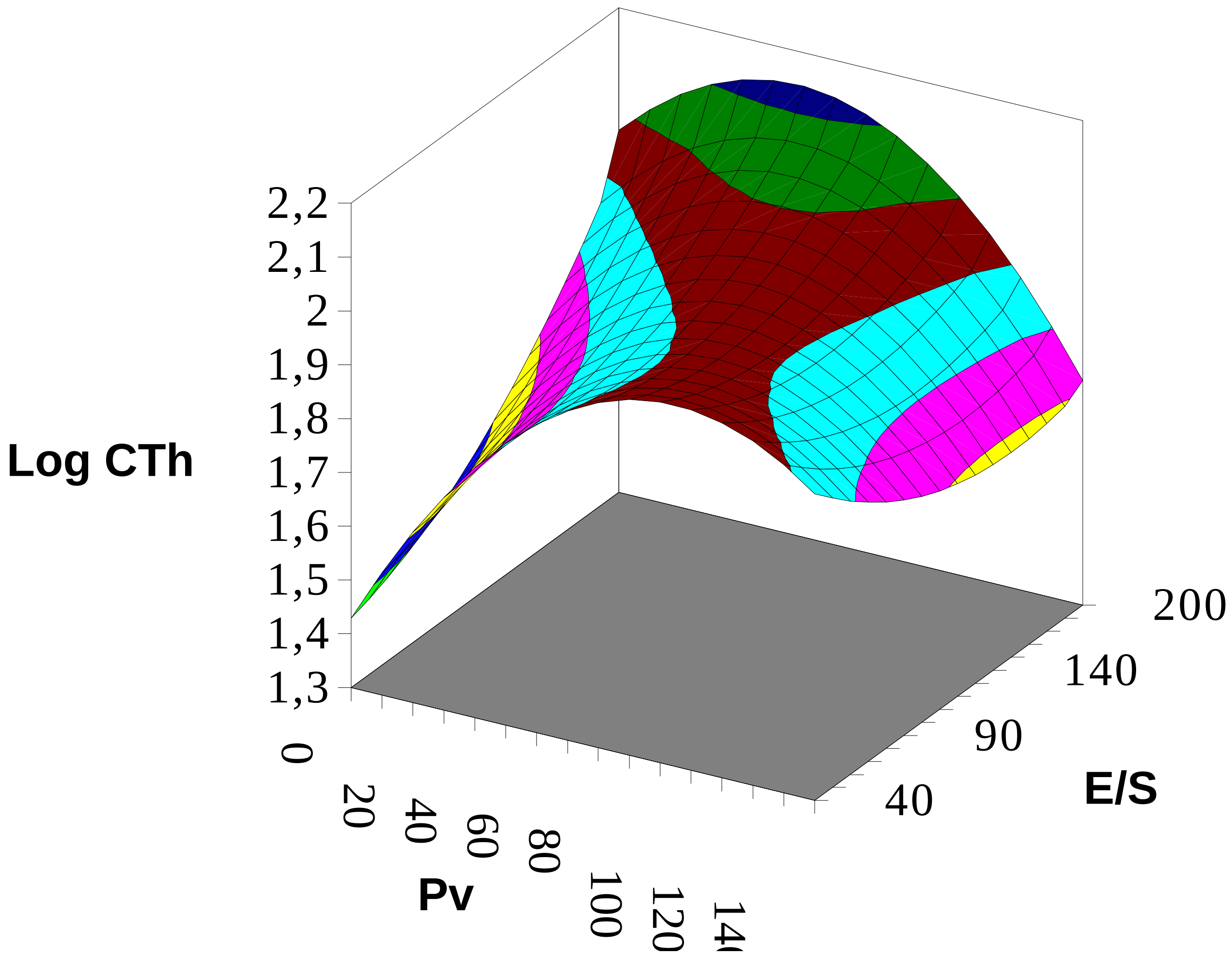
NETTOYAGE DE SALADE (1)



NETTOYAGE DE SALADE (2)

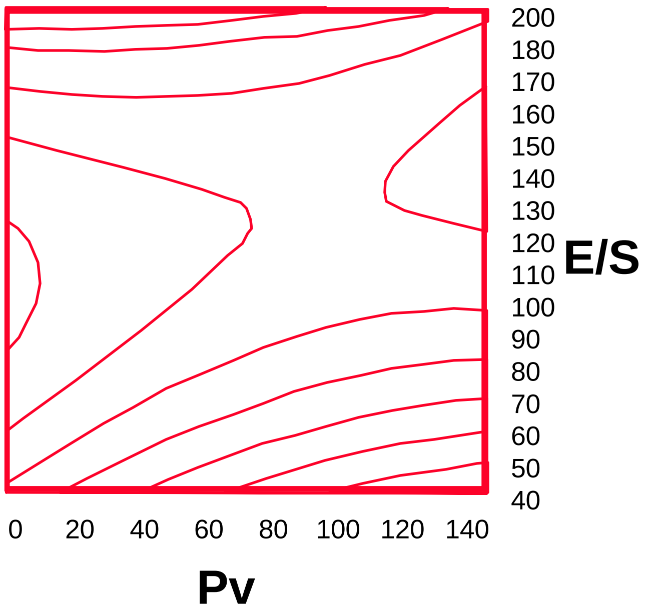


NETTOYAGE DE SALADE (3)

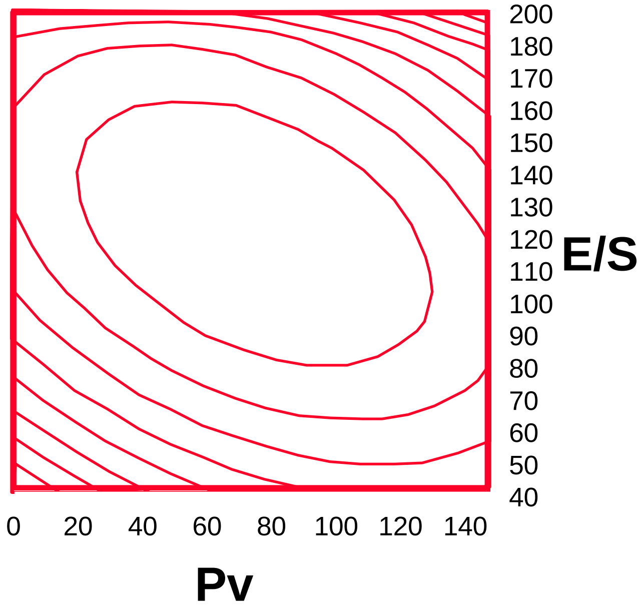


NETTOYAGE DE SALADE (4)

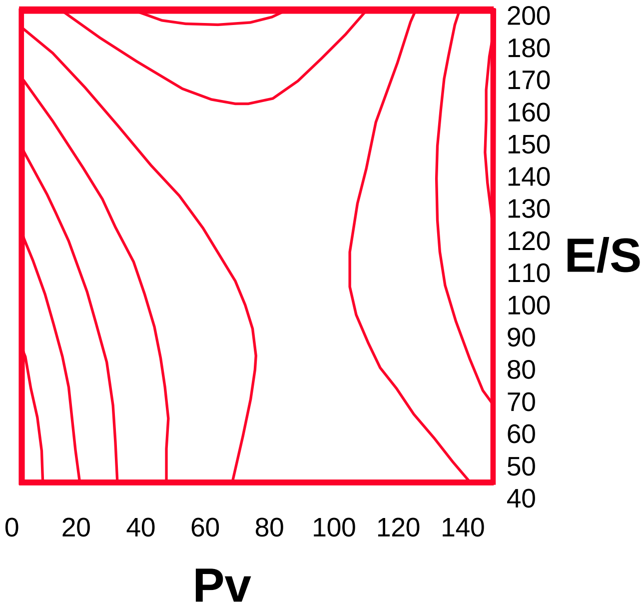
Log CF



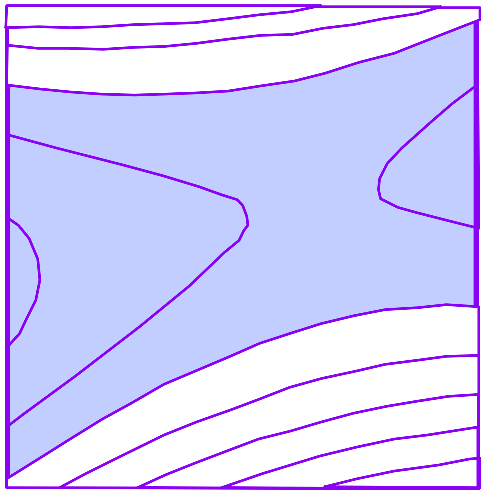
Log Rdt

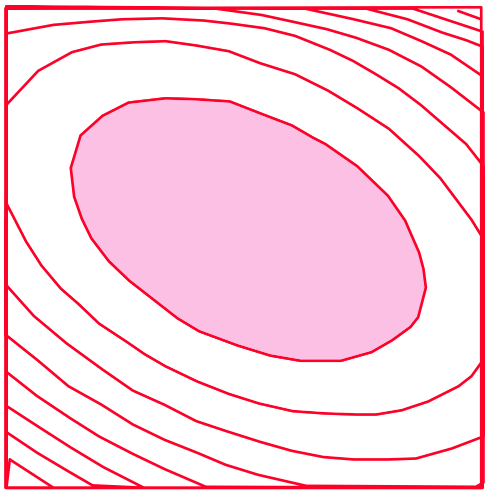


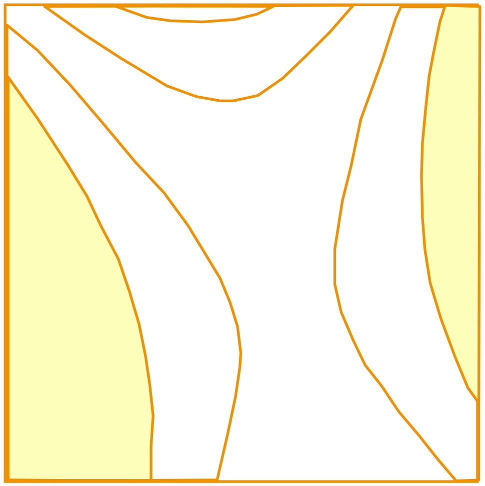
Log CTh

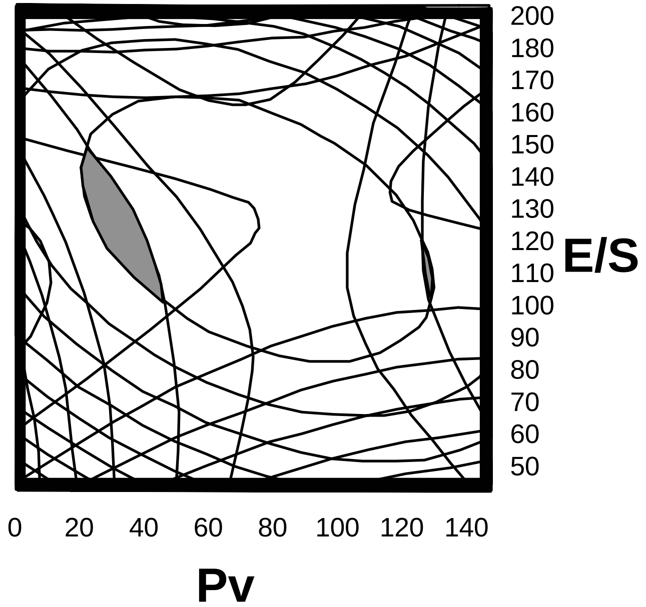


NETTOYAGE DE SALADE (5)
OPTIMISATION MULTIVARIABLE









PLANS DE BOX BENHKEN

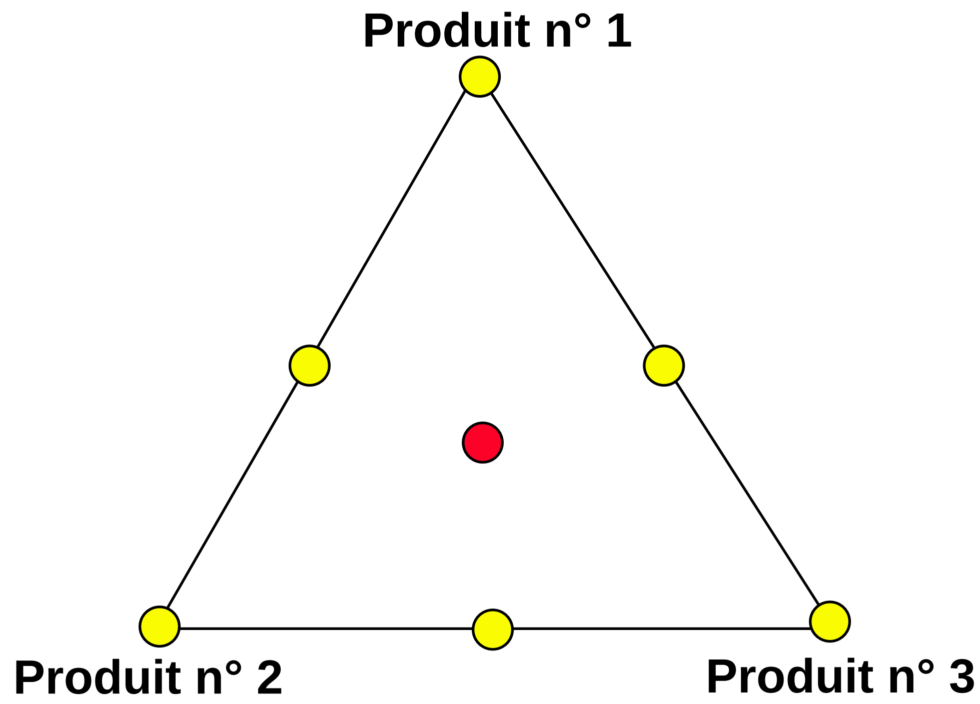
Chaque facteur est étudié
à 3 niveaux

minimum	*min*
moyenne	*moy*
Maximum	*Max*

Plan de Box-Benhken
à 3 facteurs

min	min	moy
min	Max	moy
Max	min	moy
Max	Max	moy
min	moy	min
min	moy	Max
Max	moy	min
Max	moy	Max
moy	min	min
moy	min	Max
moy	Max	min
moy	Max	Max
moy	moy	moy
moy	moy	moy

Le nombre d'expériences est égal à $2p^2 - 2p + 2$



Réseau Simplex centre de Scheffé

PLANS DE MÉLANGE (2)

L'équation habituelle

$$y = a_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + a_4c_1^2 + a_5c_2^2 + a_6c_3^2 + a_7c_1c_2 + a_8c_1c_3 + a_9c_2c_3$$

Ne peut être résolue (il faudrait estimer 10 paramètres avec seulement 7 expériences !)

Ceci est dû à la contrainte $c_1 + c_2 + c_3 = 1$ La somme totale des ingrédients fait 100 %

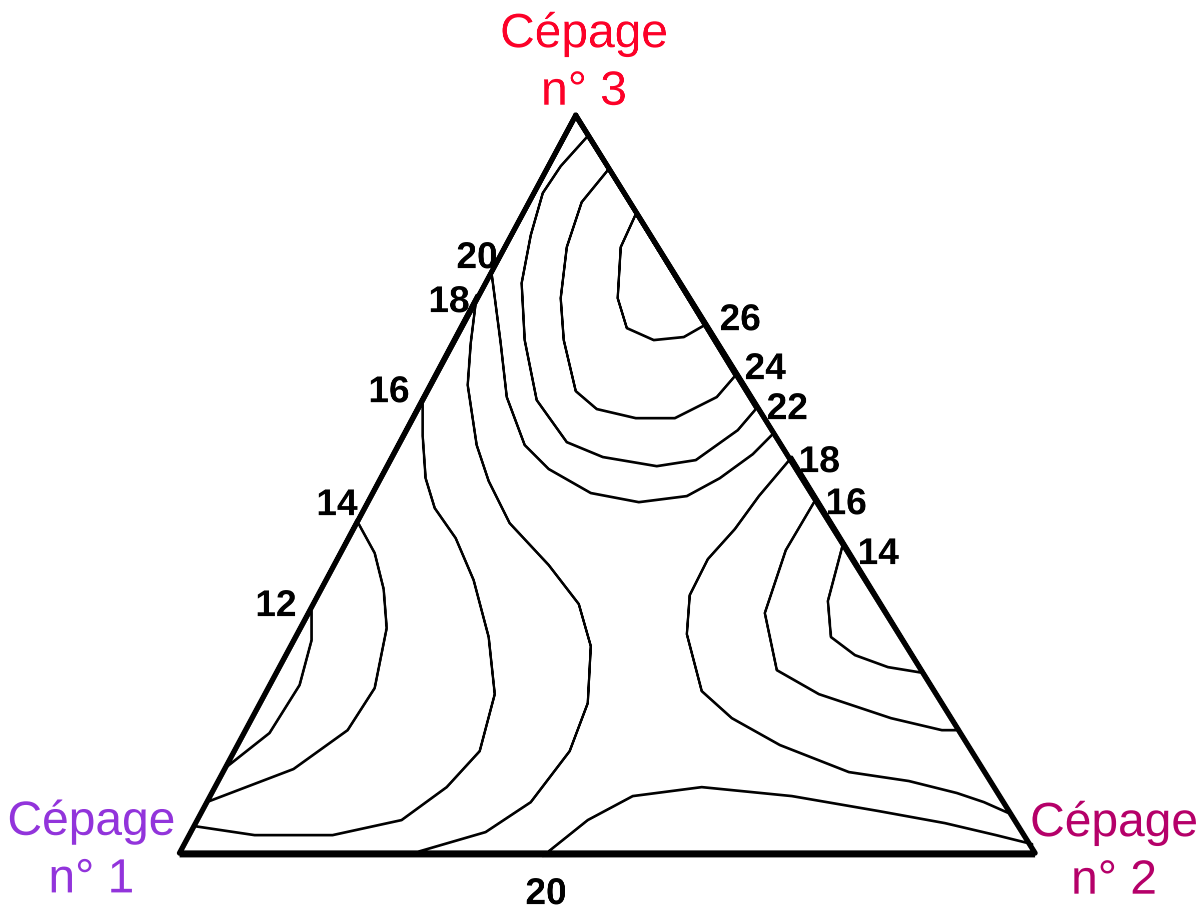
$\Longrightarrow$ $a_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = (a_0+a_1)c_1 + (a_0+a_2)c_2 + (a_0+a_3)c_3$ $\Longrightarrow$ Il n'y a donc pas besoin de constante

$\Longrightarrow$ $c_1\,(c_1 + c_2 + c_3) = c_1$ $\Longrightarrow$ $c_1^2 = c_1 - c_1\,c_2 - c_1\,c_3$ $\Longrightarrow$ Il n'y a pas besoin Des termes carrés

On ajuste donc le modèle suivant :

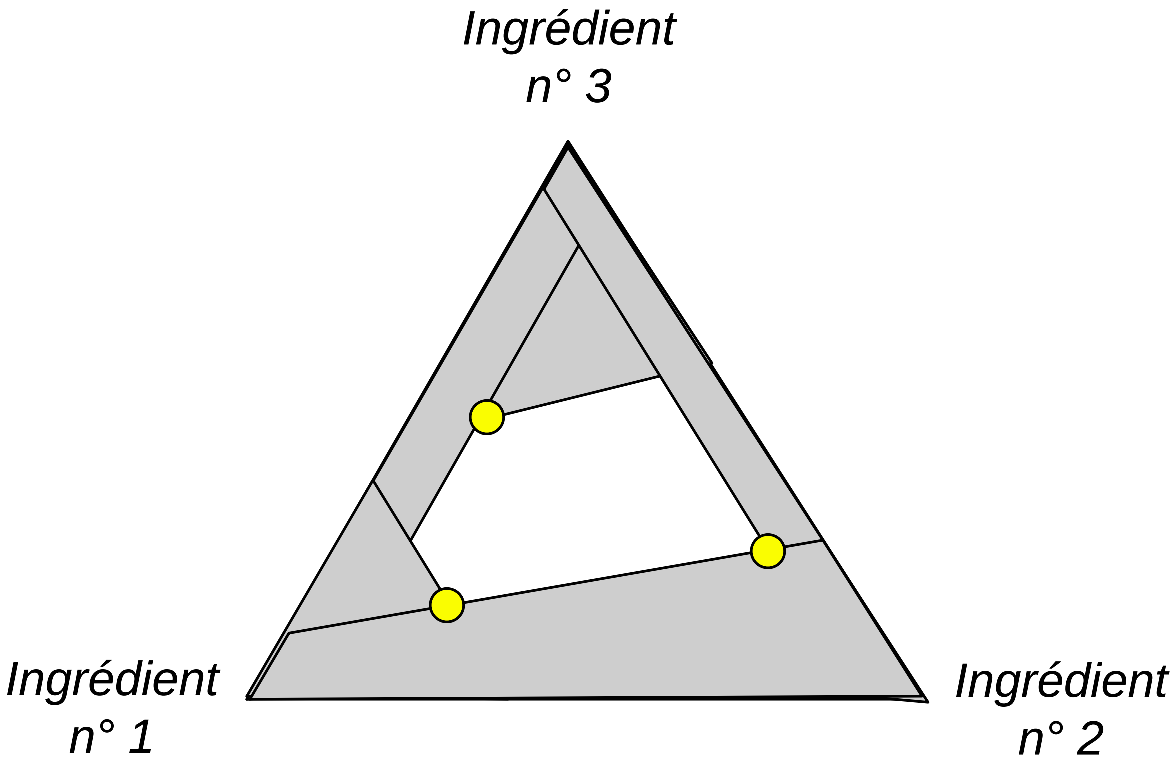
$$y = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 + a_4c_1c_2 + a_5c_1c_3 + a_6c_2c_3$$

OPTIMISATION D'UN VIN PAR MÉLANGE DE CÉPAGES



M.Sergent
D.Mathieu
R. Phan-Tan-Luu
(1985)

LES PLANS DE MÉLANGE (3)



Plans avec contraintes

FACE A DES CAS PLUS DIFFICILES, ON SE RATTACHE AUX PROPRIÉTÉS DES MATRICES EXPÉRIMENTALES.

CERTAINS AUTEURS ONT PROPOSÉS DES ALGORITHMES DE CONSTRUCTION DE PLANS D-OPTIMAUX

WYNN
FEDOROV
WHEELER
MITCHELL
WELCH

LES BLOCS INCOMPLETS ÉQUILIBRÉS (1)

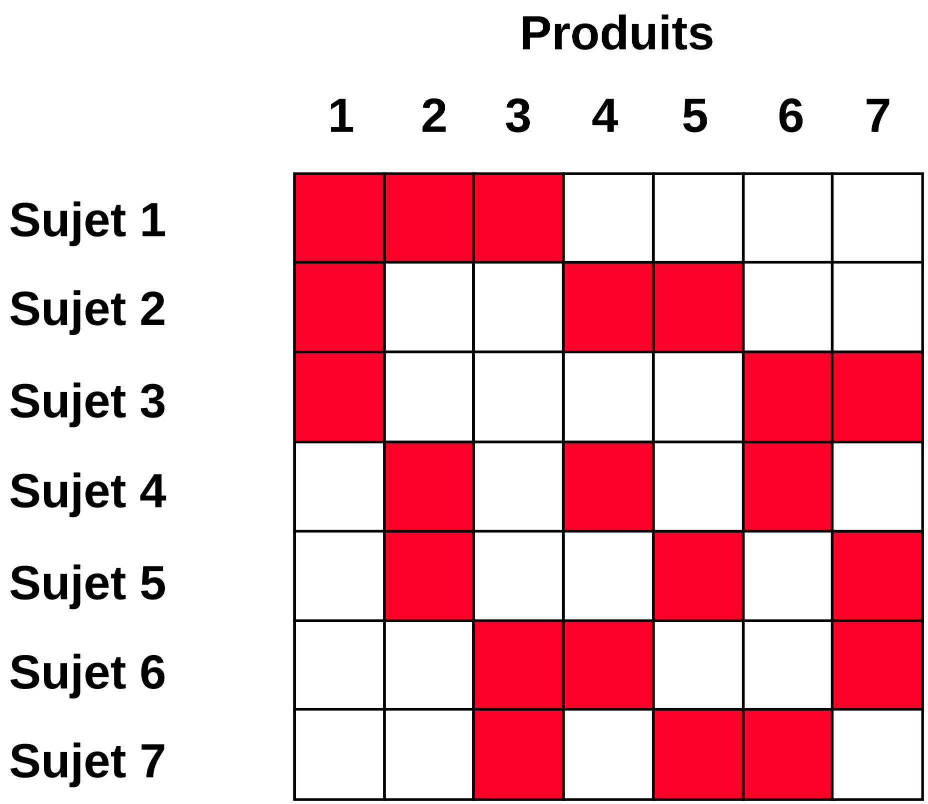
p produits sont étudiés avec un panel de
s sujets.
k est le nombre de produits testés par chaque sujet
r est le nombre de répétitions par produits
(nombre de sujets testant un produit donné)
λ est le nombre de fois où un couple de produits est noté
(nombre de sujets testant simultanément deux produits donnés)

On peut montrer que les deux conditions suivantes sont nécessaires :

$$p.r = s.k \qquad (*)$$

$$\lambda = \frac{r.(k-1)}{p-1} \qquad (**)$$

LES BLOCS INCOMPLETS ÉQUILIBRÉS (2)



Traitement statistique des résultats des BIE

	Produit n° 1	Produit n° 2	Produit n° 3	Produit n° 4	Produit n° 5	Produit n° 6	Produit n° 7
Sujet n° 1	7	5	9				
Sujet n° 2	10			11	12		
Sujet n° 3	7					6	14
Sujet n° 4		14		16		15	
Sujet n° 5		14			11		17
Sujet n° 6			16	15			17
Sujet n° 7			14		7	12	
Somme totale par produit	24	33	39	42	30	33	48
moyenne	8	11	13	14	10	11	16

Si l'on s'intéresse aux notes données par les 3 sujets qui ont testé le produit 1

	Produit n° 1	Produit n° 2	Produit n° 3	Produit n° 4	Produit n° 5	Produit n° 6	Produit n° 7
Sujet n° 1	7	5	9				
Sujet n° 2	10			11	12		
Sujet n° 3	7					6	14
Sujet n° 4		14		16		15	
Sujet n° 5		14			11		17
Sujet n° 6			16	15			17
Sujet n° 7			14		7	12	

La somme totale de ces notes T_1 est égale à 81

Si l'on s'intéresse aux notes données par les 3 sujets qui ont testé le produit 2

	Produit n° 1	Produit n° 2	Produit n° 3	Produit n° 4	Produit n° 5	Produit n° 6	Produit n° 7
Sujet n° 1	7	5	9				
Sujet n° 2	10			11	12		
Sujetan n° 3	7					6	14
Sujet n° 4		14		16		15	
Sujet n° 5		14			11		17
Sujet n° 6			16	15			17
Sujet n° 7			14		7	12	

La somme totale de ces notes T2 est égale à 108

Par conséquent, les sommes par produit doivent être corrigées pour obtenir des comparaisons non biaisées !

La somme corrigée pour le produit i est égale à :

$$g_i = S_i - \frac{T_i}{k}$$

g_1 = 24 - 81/3 = - 3 pour le produit 1

g_2 = 33 - 108/3 = - 3 pour le produit 2

La moyenne corrigée pour le produit i est égale à :

$$\hat{\alpha}_i = \frac{g_i}{r\,E}$$

avec $\boxed{E = \dfrac{p(k-1)}{k(p-1)}}$

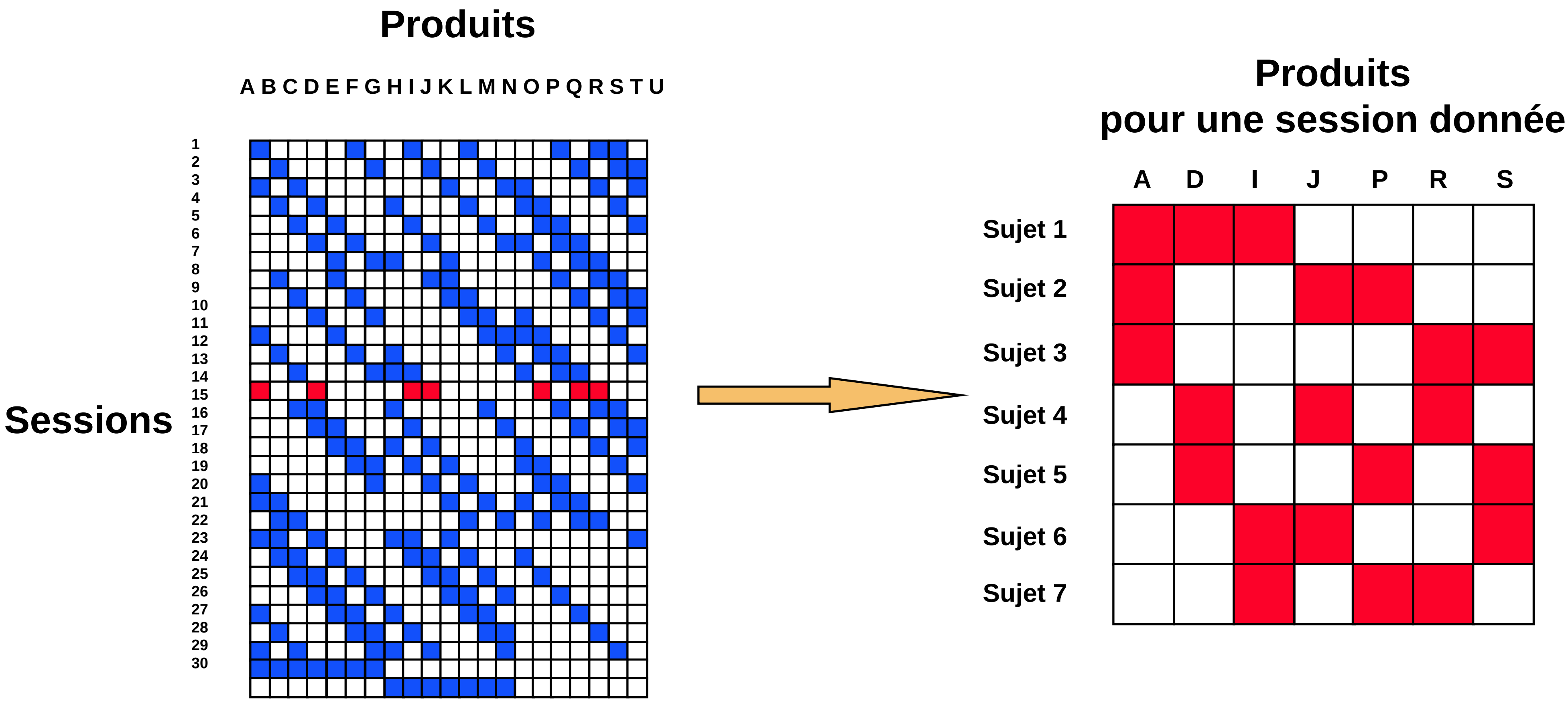
E **est appelé coefficient d'efficacité.**

CONTRAINTES

UN GRAND NOMBRE DE PRODUITS Á ÉTUDIER	**20**	**(environ)**
UN NOMBRE LIMITÉ DE BOXES DE DÉGUSTATION	**14**	**boxes**
UNE TAILLE DE PANEL LIMITÉE	**20**	**sujets au maximum**
UN NOMBRE RESTREINT DE SESSIONS	**15**	**demi-journées**
UN NOMBRE LIMITÉ DE PRODUITS PAR SUJET	**6**	**produit maximum / jour**

…….

LES BLOCS INCOMPLETS ÉQUILIBRES A DEUX ETAGES



Ordre de présentation des produits

Sujet n° 1	A	B	C	D
Sujet n° 2	B	D	A	C
Sujet n° 3	C	A	D	B
Sujet n° 4	D	C	B	A

Carrés latins de Williams

	Jour 1	Jour 2	Jour 3	Jour 4	Jour 5	Jour 6	Jour 7	Jour 8	Jour 9	Jour 10
Sujet 1	P1	P2	P10	P3	P9	P4	P8	P5	P7	P6
Sujet 2	P2	P3	P1	P4	P10	P5	P9	P6	P8	P7
Sujet 3	P3	P4	P2	P5	P1	P6	P10	P7	P9	P8
Sujet 4	P4	P5	P3	P6	P2	P7	P1	P8	P10	P9
Sujet 5	P5	P6	P4	P7	P3	P8	P2	P9	P1	P10
Sujet 6	P6	P7	P5	P8	P4	P9	P3	P10	P2	P1
Sujet 7	P7	P8	P6	P9	P5	P10	P4	P1	P3	P2
Sujet 8	P8	P9	P7	P10	P6	P1	P5	P2	P4	P3
Sujet 9	P9	P10	P8	P1	P7	P2	P6	P3	P5	P4
Sujet 10	P10	P1	P9	P2	P8	P3	P7	P4	P6	P5

QUELQUES CONSEILS

- **Faire les mesures plutôt aux bornes du domaine d'étude**
- **Eviter les confusions d'effet en recherchant l'orthogonalité entre les facteurs**
- **Utiliser les logiciels de construction de plans d'expériences quand cela est possible**
- **valider concrètement les résultats trouvés**

Clairement définir les objectifs

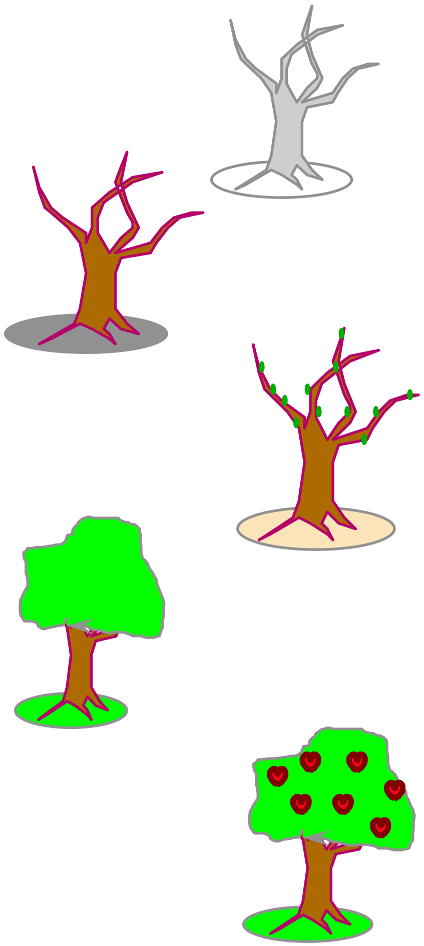
Lister les facteurs influents

Choisir le domaine de variation

Lister l’ensemble des contraintes

Construire le plan d’expériences

L'APPROCHE EXPERIMENTALE



Conjecture

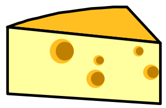
Plan d'expériences

Expérimentation

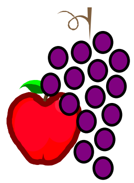
Analyse des résultats

Conclusions

LES PLANS D'EXPERIENCES PERMETTENT



Précision



Efficacité

Flexibilité

BIBLIOGRAPHIE

Gilles et Marie-Christine SADO
Les plans d'expériences
AFNOR Technique

Yves TOURBIER, et Al
Les plans d'expériences
Presses Romandes

Jacques GOUPY
Les plans d'expériences
DUNOD

BOX G.E.P, HUNTER W.G. & HUNTER J.S.
Statistics for experimenters
John Wiley & Sons 1978

KEMPTHORNE O.
The design ans analysis of experiments
John Wiley & Sons 1952

CORNELL J.A.
Experiments with mixtures
John Wiley and Sons 1981

BARKER T.B.
Quality by experimental designs
Marcel Dekker 1985

DAVIES O.L.
The design and analysis of industrial experiments
Oliver & Boyd 1985